



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
Etapă locală 10.02.2024  
Județul Buzău  
CLASA a IX-a

**Subiectul 1 (7 puncte)**

1. Să se determine minimul expresiei:  $E(x) = |x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 2024|$ , precum și valorile reale ale lui  $x$  pentru care se realizează acest minim.
2. Să se determine minimul expresiei:  $F(x) = |x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 2024| + |x - 2025|$ , precum și valorile reale ale lui  $x$  pentru care se realizează acest minim.

**Soluție și barem**

1.  $|x - 1| + |x - 2024| = |x - 1| + |2024 - x| \geq |x - 1 + 2024 - x| = 2023$ , cu egalitate când  $x \in [1, 2024]$ .....2 puncte  
Analog  $|x - 2| + |x - 2023| \geq 2021$  cu egalitate când  $x \in [2, 2023]$ ,  
 $|x - 3| + |x - 2022| \geq 2019$  cu egalitate când  $x \in [3, 2022]$ ,...,  
 $|x - 1012| + |x - 1013| \geq 1$  cu egalitate când  $x \in [1012, 1013]$ ...1 punct  
Minimul expresiei  $E(x)$  se realizează atunci când în inegalitățile precedente avem egalitate, adică atunci când  $x \in [1, 2024] \cap [2, 2023] \cap \dots \cap [1012, 1013] = [1012, 1013]$ .....1 punct  
Acest minim este  $1 + 3 + 5 + \dots + 2023 = 1012^2$ .....1 punct
2. Procedând ca la punctul anterior  $|x - 1| + |x - 2025| \geq 2024$ ,  $|x - 2| + |x - 2024| \geq 2022$ , ...,  $|x - 1012| + |x - 1014| \geq 2$ , minimul expresiei  $|x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 1012| + |x - 1014| + |x - 1015| + \dots + |x - 2024| + |x - 2025|$  este  $2 + 4 + 6 + \dots + 2024 = 1012 \cdot 1013$  și se realizează când  $x \in [1012, 1014]$ .....1 punct  
Minimul expresiei  $|x - 1013|$  este 0 și se realizează când  $x = 1013 \in [1012, 1014]$ , deci minimul expresiei  $F(x)$  este  $0 + 1012 \cdot 1013 = 1012 \cdot 1013$   
Și se realizează când  $x = 1013$ .....1 punct



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
DEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
Etapa locală 10.02.2024  
Județul Buzău  
CLASA a IX-a

**Subiectul 2 (7 puncte)**

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$\left[ \frac{3x+1}{2} \right] + \left[ \frac{9x+5}{6} \right] + \left[ \frac{9x+7}{6} \right] = \frac{7x+5}{2},$$

unde  $[a]$  reprezintă partea întreagă a numărului  $a$ .

**Soluție și barem**

$$\left[ \frac{3x+1}{2} \right] + \left[ \frac{3(3x+1)}{6} + \frac{2}{6} \right] + \left[ \frac{3(3x+1)}{6} + \frac{4}{6} \right] = \frac{7x+5}{2} \Leftrightarrow \left[ \frac{3x+1}{2} \right] + \left[ \frac{3x+1}{2} + \frac{1}{3} \right] + \left[ \frac{3x+1}{2} + \frac{2}{3} \right] = \frac{7x+5}{2} \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$\left[ \frac{3x+1}{2} \right] + \left[ \frac{3x+1}{2} + \frac{1}{3} \right] + \left[ \frac{3x+1}{2} + \frac{2}{3} \right] = \frac{7x+5}{2} \Leftrightarrow \left[ 3 \cdot \frac{3x+1}{2} \right] = \frac{7x+5}{2} \Leftrightarrow \left[ \frac{9x+3}{2} \right] = \frac{7x+5}{2} \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$\frac{7x+5}{2} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{2k-5}{7} \Rightarrow \left[ \frac{9k-12}{7} \right] = k \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$k \leq \frac{9k-12}{7} < k+1 \Rightarrow k \in \{6; 7; 8; 9\} \Rightarrow x \in \left\{ 1; \frac{9}{7}; \frac{11}{7}; \frac{13}{7} \right\} \quad \dots\dots\dots 2p$$



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
Etapa locală 10.02.2024  
Județul Buzău  
CLASA a IX-a

**Subiectul 3 (7 puncte)**

Demonstrați că pentru orice  $a, b, c > 0$  are loc inegalitatea

$$\frac{a^3}{a+2b} + \frac{b^3}{b+2c} + \frac{c^3}{c+2a} \geq \left( \frac{a+b+c}{3} \right)^2$$

**Soluție și barem**

Avem  $\frac{a^3}{a+2b} + \frac{b^3}{b+2c} + \frac{c^3}{c+2a} = \frac{a^4}{a^2+2ab} + \frac{b^4}{b^2+2bc} + \frac{c^4}{c^2+2ca} \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$

$\frac{a^4}{a^2+2ab} + \frac{b^4}{b^2+2bc} + \frac{c^4}{c^2+2ca} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}$  (Inegalitatea  
Cauchy-Buniakovski, Bergstrom, Andreescu)..... 2 puncte

$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca} \geq \frac{\left(\frac{1}{3}(a+b+c)^2\right)^2}{(a+b+c)^2} \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$

$\frac{\left(\frac{1}{3}(a+b+c)^2\right)^2}{(a+b+c)^2} = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$



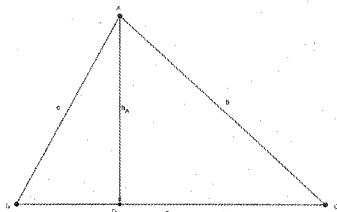
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
Etapa locală 10.02.2024  
Județul Buzău  
CLASA a IX-a

**Subiectul 4 (7 puncte)**

Fie triunghiul ascuțitunghic  $ABC$ ,  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$  și  $\vec{h}_A, \vec{h}_B, \vec{h}_C$ , vectorii corespunzători înălțimilor din  $A, B$  respectiv  $C$ . Să se arate că:

$$a^2 \cdot \vec{h}_A + b^2 \cdot \vec{h}_B + c^2 \cdot \vec{h}_C = \vec{0}.$$

**Soluție și barem**



Avem  $BD = c \cdot \cos B$ ,  $CD = b \cdot \cos C$ ,  $a = c \cdot \cos B + b \cdot \cos C$  .....2 punct

$$\vec{h}_A = \frac{(b \cdot \cos C) \cdot \vec{AB} + (c \cdot \cos B) \cdot \vec{AC}}{a} \dots\dots\dots 2 \text{ punct}$$

$$a^2 \cdot \vec{h}_A = (ab \cdot \cos C) \cdot \vec{AB} + (ac \cdot \cos B) \cdot \vec{AC} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Și analoagele:

$$b^2 \cdot \vec{h}_B = (bc \cdot \cos A) \cdot \vec{BC} + (ba \cdot \cos C) \cdot \vec{BA},$$

$$c^2 \cdot \vec{h}_C = (ca \cdot \cos B) \cdot \vec{CA} + (cb \cdot \cos A) \cdot \vec{CB}, \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\text{Rezultă } a^2 \cdot \vec{h}_A + b^2 \cdot \vec{h}_B + c^2 \cdot \vec{h}_C = (ab \cdot \cos C) \cdot (\vec{AB} + \vec{BA}) + (ac \cdot \cos B) \cdot (\vec{AC} + \vec{CA}) + (bc \cdot \cos A) \cdot (\vec{BC} + \vec{CB}) = \vec{0} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
Etapa locală 10.02.2024  
Județul Buzău  
CLASA a X-a

**Subiectul 1 (7 puncte)**

Să se determine toate perechile ordonate  $(x, y) \in R \times R$  pentru care

$$x^{2024} + y^{2024} \geq 1 \text{ și } \sqrt[2024]{|x|} + \sqrt[2024]{|y|} \leq 1.$$

**Soluție și barem**

Substituția  $u = |x|, v = |y|$  conduce la sistemul  $\begin{cases} u^{2024} + v^{2024} \geq 1 & (1) \\ \sqrt[2024]{u} + \sqrt[2024]{v} \leq 1 & (2) \end{cases}$  cu nec.  $u, v \geq 0$

..... 1punct  
 $u > 1 \Rightarrow \sqrt[2024]{u} > 1$ . Dar  $\sqrt[2024]{v} \geq 0 \Rightarrow \sqrt[2024]{u} + \sqrt[2024]{v} > 1$ , contradicție cu (2)

..... 1punct  
Analog, dacă  $v > 1 \Rightarrow$  contradicție cu (2), deci  $\begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 \end{cases}$

..... 1punct  
 $\begin{cases} 0 < u < 1 \\ 0 < v < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^{2023} < 1 \\ v^{2023} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^{2024} < u \\ v^{2024} < v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u < \sqrt[2024]{u} \\ v < \sqrt[2024]{v} \end{cases} \Rightarrow u + v < \sqrt[2024]{u} + \sqrt[2024]{v} \leq 1 \Rightarrow u + v < 1 \quad (3)$

..... 1punct  
 $\begin{cases} u^{2024} < u \\ v^{2024} < v \end{cases} \Rightarrow 1 \leq u^{2024} + v^{2024} < u + v \Rightarrow 1 < u + v \quad (4)$ . Din (3) și (4)  $\Rightarrow 1 < 1$  contradicție

..... 1punct  
Deci  $\begin{cases} u \in \{0; 1\} \\ 0 \leq v \leq 1 \end{cases}$  sau  $\begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ v \in \{0; 1\} \end{cases}$  În ambele cazuri, folosind (1) și (2), se obțin soluțiile

$\begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases}; \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases}$  ..... 1punct

Revenind la substituție obținem  $(x, y) \in \{(0; 1), (1; 0), (0; -1), (-1; 0)\}$

..... 1punct



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
Etapă locală 10.02.2024  
Județul Buzău  
CLASA a X-a

**Subiectul 2 (7 puncte)**

Fie  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $x_1, x_2, \dots, x_n$  numere reale astfel încât  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$   
Să se arate că  $2^{x_1^2} + 2^{x_2^2} + \dots + 2^{x_n^2} \geq 2n$ .

**Soluție și barem**

Din inegalitatea mediilor avem:

$$2^{x_1^2} + 2^{x_2^2} + \dots + 2^{x_n^2} \geq n \cdot \sqrt[n]{2^{x_1^2} \cdot 2^{x_2^2} \cdot \dots \cdot 2^{x_n^2}} \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$2^{x_1^2} + 2^{x_2^2} + \dots + 2^{x_n^2} \geq n \cdot \sqrt[n]{2^{x_1^2} \cdot 2^{x_2^2} \cdot \dots \cdot 2^{x_n^2}} = n \cdot \sqrt[n]{2^{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} =$$

$$= n \cdot 2^{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x$  este strict crescătoare..... 1 punct

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} \geq \left( \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^2 \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

Rezultă  $2^{x_1^2} + 2^{x_2^2} + \dots + 2^{x_n^2} \geq n \cdot 2^{\left( \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^2} = 2n \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**Etapă locală 10.02.2024**  
**Județul Buzău**  
**CLASA a X-a**

**Subiectul 3 (7 puncte)**

Fie  $a, b \in \mathbb{C}^*$  astfel încât  $|a| = |b| = |a - b|$  și  $z = \frac{a}{b}$ .

Să se demonstreze că:

i)  $|z| = 1$  și  $z \notin \{-1, 1\} \Rightarrow$

ii) Determinați mulțimea  $\{z^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Soluție și barem**

i)  $|z| = \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} = 1$ .....1 punct

Dacă  $z = 1 \Rightarrow a = b \Rightarrow |a| = |b| = 0 \Rightarrow a = b = 0$  fals.....1 punct

Dacă  $z = -1 \Rightarrow b = -a \Rightarrow |a| = |b| = 2|a|$  și cum  $a \neq 0 \Rightarrow 1=2$ , fals.

Deci  $z \notin \{-1, 1\}$ .....1 punct

ii) Din enunț obținem  $|a| = |b| = |b| \left| \frac{a}{b} - 1 \right| \Rightarrow 1 = \left| \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{a}{b} - 1 \right| \Rightarrow$   
 $\Rightarrow |z| = |z - 1| = 1$ .....1 punct

$|z|^2 = |z - 1|^2 = 1 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = (z - 1)(\bar{z} - 1) = 1 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = z \cdot \bar{z} -$   
 $-z - \bar{z} + 1 = 1 \Rightarrow z + \bar{z} = 1$ .....1 punct

Rezultă  $z + \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow z^3 + 1 = 0$

Deci  $z^3 = -1$ ,  $z \neq -1$  și rădăcinile ecuației  $z^2 - z + 1 = 0$  sunt

$z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ ,  $\bar{z} = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{z} = z^{-1}$ .....1 punct

$\{z^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \left\{ 1, z, z^2, -1, -z, -z^2 = \frac{1}{z} = \bar{z} \right\}$ .....1



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
Etapa locală 10.02.2024  
Județul Buzău  
CLASA a X-a

**Subiectul 4 (7 puncte)**

Demonstrați că funcția  $f: N^* \rightarrow R, f(n) = \log_{n+1} n$  este strict crescătoare

**Soluție și barem**

Trebuie să arătăm că  $f(n) < f(n+1) \Leftrightarrow \log_{n+1} n < \log_{n+2}(n+1)$   
 $\forall n \in N^* \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$\log_{n+1} n < \log_{n+2}(n+1) \Leftrightarrow \frac{\lg n}{\lg(n+1)} < \frac{\lg(n+1)}{\lg(n+2)} \Leftrightarrow (\lg n)(\lg(n+2)) <$   
 $< (\lg(n+1))^2 \Leftrightarrow \sqrt{(\lg n)(\lg(n+2))} < \lg(n+1) \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$

Însă  $\sqrt{(\lg n)(\lg(n+2))} < \frac{\lg n + \lg(n+2)}{2} = \lg \sqrt{n(n+2)} \dots\dots\dots .2 \text{ puncte}$

Este suficient să demonstrăm că:

$\lg \sqrt{n(n+2)} < \lg(n+1) \Leftrightarrow \sqrt{n(n+2)} < n+1 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$\sqrt{n(n+2)} < \frac{n+n+2}{2} = n+1 \text{ sau } n(n+2) < (n+1)^2 \Leftrightarrow n^2 + 2n <$   
 $< n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow 0 < 1 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$





OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
Etapa locală 10.02.2024  
Județul Buzău  
CLASA a XI-a

**Subiectul 1 (7 puncte)**

Fie matricele  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & 1 & -\frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

a) Arătați că  $A = B \cdot C \cdot B^{-1}$ , unde  $B^{-1}$  este inversa matricii  $B$ .

b) Calculați  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Soluție și barem**

$$\text{a) } \det B = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & 1 & -\frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} \Rightarrow B \text{ este inversabilă } {}_B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{12} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{12} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{9} & 1 & -\frac{1}{18} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \dots\dots\dots 2p$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & 1 & -\frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{9} & 1 & -\frac{1}{18} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{9} & 1 & -\frac{1}{18} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1p$$

$$1.b) A^n = (B \cdot C \cdot B^{-1})^n = B \cdot C \cdot B^{-1} \cdot B \cdot C \cdot B^{-1} \cdot B \cdot C \cdot B^{-1} \cdot \dots \cdot B \cdot C \cdot B^{-1} = B \cdot C^n \cdot B^{-1} \dots\dots\dots 1p$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{pmatrix}; C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^3 & 0 \\ 0 & 0 & -3^3 \end{pmatrix} \dots C^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \cdot 3^n \end{pmatrix}, \text{ demonstrație prin inducție } \dots\dots\dots 2p$$

$$A^n = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & 1 & -\frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \cdot 3^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{9} & 1 & -\frac{1}{18} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (-1)^n \cdot 3^n \\ 0 & 3^n & \frac{-(-1)^n \cdot 3^n}{6} \\ 0 & 0 & (-1)^n \cdot 3^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{9} & 1 & -\frac{1}{18} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2 \cdot (-1)^n \cdot 3^n}{3} & 0 & \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{3} \\ \frac{-(-1)^n \cdot 3^n + 2 \cdot 3^n}{9} & 3^n & \frac{-(-1)^n \cdot 3^n - 3^n}{18} \\ \frac{2 \cdot (-1)^n \cdot 3^n}{3} & 0 & \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{3} \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1p$$



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
Etapa locală 10.02.2024  
Județul Buzău  
CLASA a XI-a

**Subiectul 2 (7 puncte)**

Să se calculeze limita  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{x+7}}{\sqrt[4]{x+15} - \sqrt[5]{x+31}}$ .

**Soluție și barem**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{x+7}}{\sqrt[4]{x+15} - \sqrt[5]{x+31}} = \frac{L_1}{L_2}, \text{ unde}$$

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{x+7}}{x-1} \text{ și } L_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x+15} - \sqrt[5]{x+31}}{x-1} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{x+7}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\text{unde } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)((\sqrt{x+3}+2))} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x+7}-2)(\sqrt[3]{(x+7)^2+2^3}\sqrt{x+7}+2^2)}{(x-1)(\sqrt[3]{(x+7)^2+2^3}\sqrt{x+7}+2^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+7)^2+2^3}\sqrt{x+7}+2^2} = \frac{1}{12} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x+15} - \sqrt[5]{x+31}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x+15}-2}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x+31}-2}{x-1} = \frac{1}{32} - \frac{1}{80} = \frac{3}{160}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x+15}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[4]{x+15}-2)(\sqrt[4]{(x+15)^3+2^4}\sqrt{(x+15)^2+2^2}\sqrt{x+15}+2^3)}{(x-1)(\sqrt[4]{(x+15)^3+2^4}\sqrt{(x+15)^2+2^2}\sqrt{x+15}+2^3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[4]{(x+15)^3+2^4}\sqrt{(x+15)^2+2^2}\sqrt{x+15}+2^3} = \frac{1}{32} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x+31}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[5]{x+31}-2)(\sqrt[5]{(x+31)^4+2^5}\sqrt{(x+31)^3+2^2}\sqrt[5]{(x+31)^2+2^3}\sqrt{x+31}+2^4)}{(x-1)(\sqrt[5]{(x+31)^4+2^5}\sqrt{(x+31)^3+2^2}\sqrt[5]{(x+31)^2+2^3}\sqrt{x+31}+2^4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt[5]{(x+31)^4+2^5}\sqrt{(x+31)^3+2^2}\sqrt[5]{(x+31)^2+2^3}\sqrt{x+31}+2^4)} = \frac{1}{80} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\text{Finalizare } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{x+7}}{\sqrt[4]{x+15} - \sqrt[5]{x+31}} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{160}{3} = \frac{80}{9} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
Etapa locală 10.02.2024  
Județul Buzău  
CLASA a XI-a

**Subiectul 3 (7 puncte)**

- a) Fie  $A \in M_2(R)$ . Arătați că  $A^4 + A^2 + I_2 = O_2$  dacă și numai dacă  $A^2 - A + I_2 = O_2$  sau  $A^2 + A + I_2 = O_2$ .
- b) Dați un exemplu de o matrice  $A \in M_2(C)$  astfel încât  $A^4 + A^2 + I_2 = O_2$ ,  $A^2 - A + I_2 \neq O_2$  și  $A^2 + A + I_2 \neq O_2$

**Soluție și barem**

- a) Dacă  $A^2 - A + I_2 = O_2$  sau  $A^2 + A + I_2 = O_2$  atunci  $A^4 + A^2 + I_2 = (A^2 - A + I_2)(A^2 + A + I_2) = O_2$ .....1 punct  
Dacă polinomul minimal al matricii  $A$  are gradul 1 atunci există  $\alpha, \beta \in R, \alpha \neq 0$  astfel încât  $\alpha A + \beta I_2 = O_2 \Rightarrow A = -\frac{\beta}{\alpha} I_2 = \gamma I_2, \gamma \in R \Rightarrow A^4 + A^2 + I_2 = (\gamma^4 + \gamma^2 + 1)I_2 = O_2 \Rightarrow \gamma^4 + \gamma^2 + 1 = 0, \gamma \in R$ , fals  
.....1 punct  
Deci polinomul minimal al matricii are gradul 2, coincide cu polinomul caracteristic și divide orice polinom care are pe  $A$  ca rădăcină.....1 punct  
Cum  $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$  este singura descompunere în  $R$  rezultă că polinomul caracteristic al lui  $A$  este  $X^2 - X + 1$  sau  $X^2 + X + 1$  adică  $A^2 - A + I_2 = O_2$  sau  $A^2 + A + I_2 = O_2$ .....1 punct
- b) Avem  $A^4 + A^2 + I_2 = O_2$  și ecuația caracteristică a lui  $A^2$   $A^4 - \text{Tr}(A^2) \cdot A^2 + \det(A^2) I_2 = O_2$  deci vom căuta o matrice  $A^2$  cu  $\text{Tr}(A^2) = -1$  și  $\det(A^2) = 1$ , de exemplu  $A^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$ , unde  $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3}$ .....1 punct
- Atunci  $A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & \cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$ , .....1 punct
- Verificare că  $A^4 + A^2 + I_2 = O_2, A^2 - A + I_2 \neq O_2$  și  $A^2 + A + I_2 \neq O_2$   
.....1 punct



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
Etapa locală 10.02.2024  
Județul Buzău  
CLASA a XI-a

**Subiectul 4 (7 puncte)**

Să se studieze convergența șirului  $(a_n)_{n \geq 0}$ , cu  $a_0 = 1$  și  $a_{n+1} = \frac{2a_n+3}{a_n+2}$ ,  
pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  și în caz de convergență determinați-i limita.

**Soluție și barem**

Avem  $a_0 = 1 > 0$ . Presupunem că  $a_n > 0$ , rezultă  $\frac{2a_n+3}{a_n+2} = a_{n+1} > 0$ .

Deci prin inducție matematică rezultă că  $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ .....1 punct.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n+3}{a_n+2} - a_n = \frac{2a_n+3-a_n^2-2a_n}{a_n+2} = \frac{3-a_n^2}{a_n+2} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Avem  $3 - a_0^2 = 3 - 1^2 = 2 > 0$ . Presupunem  $3 - a_n^2 > 0$  și rezultă

$$3 - a_{n+1}^2 = 3 - \left(\frac{2a_n+3}{a_n+2}\right)^2 = \frac{3a_n^2+12a_n+12-4a_n^2-12a_n-9}{(a_n+2)^2} = \frac{3-a_n^2}{(a_n+2)^2} > 0$$

Deci prin inducție matematică  $3 - a_n^2 > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ ..... .1 punct

Rezultă deci  $a_{n+1} - a_n = \frac{3-a_n^2}{a_n+2} > 0 \Rightarrow$  Șirul este strict crescător..1 punct

Din  $3 - a_n^2 > 0 \forall n \in \mathbb{N}$  și  $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$  rezultă  $0 < a_n < \sqrt{3} \forall n \in \mathbb{N}$

Deci șirul  $(a_n)_{n \geq 0}$  este mărginit..... 1 punct

Șirul  $(a_n)_{n \geq 0}$  fiind strict crescător și mărginit este convergent adică există

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\text{Trecând la limită în relația de recurență obținem } l = \frac{2l+3}{l+2} \Leftrightarrow l^2 = 3$$

și cum  $l > 0$  rezultă  $l = \sqrt{3}$ .....1 punct



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
Etapă locală 10.02.2024  
Județul Buzău  
CLASA a XII-a

**Subiectul 1 (7 puncte)**

Determinați primitiva  $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  a funcției  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $f(x) = (x + 1)^2 \cdot e^{x - \frac{1}{x}}$ , cu proprietatea că  $F(1) = 2024$ .

**Soluție și barem**

$$\int (x + 1)^2 \cdot e^{x - \frac{1}{x}} dx = \int (x^2 + 2x + 1) \cdot e^{x - \frac{1}{x}} dx =$$

$$= \int \left[ x^2 \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) + 2x \right] \cdot e^{x - \frac{1}{x}} dx = \dots \dots \dots 2 \text{ puncte}$$

$$= \int x^2 e^{x - \frac{1}{x}} \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) dx + 2 \int x \cdot e^{x - \frac{1}{x}} dx =$$

$$= \int x^2 \left( e^{x - \frac{1}{x}} \right)' dx + 2 \int x \cdot e^{x - \frac{1}{x}} dx \dots \dots \dots 2 \text{ puncte}$$

$$= x^2 e^{x - \frac{1}{x}} - 2 \int x \cdot e^{x - \frac{1}{x}} dx + 2 \int x \cdot e^{x - \frac{1}{x}} dx = x^2 e^{x - \frac{1}{x}} + C \dots \dots \dots 2 \text{ puncte}$$

$$F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = x^2 e^{x - \frac{1}{x}} + c, F(1) = 2024 \Rightarrow c = 2023$$

$$\text{Rezultă } F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = x^2 \cdot e^{x - \frac{1}{x}} + 1 \dots \dots \dots 1 \text{ punct}$$



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
Etapa locală 10.02.2024  
Județul Buzău  
CLASA a XII-a

**Subiectul 2 (7 puncte)**

- a) Să se arate că  $\forall x, y, z \in [0, 1)$  avem  $\{\{x + y\} + z\} = \{x + y + z\}$ ,  
b) Pe mulțimea  $G = [0, 1)$  se definește legea de compoziție  $x * y = \{x + y\}$ ,  
unde  $\{a\}$  este partea fracționară a numărului real  $a$ .  
Arătați că  $(G, *)$  este grup abelian.  
c) Să se rezolve în  $(G, *)$  ecuația  $x * x * x = \frac{3}{4}$

**Soluție și barem**

- a)  $\{\{x + y\} + z\} = \{x + y\} + z - [\{x + y\} + z] = x + y - [x + y] + z -$   
 $-[x + y - [x + y] + z] = x + y + z - [x + y] + [x + y] - [x + y + z] =$   
 $= x + y + z - [x + y + z] = \{x + y + z\}$ .....2 puncte
- b) Dacă  $x, y \in [0, 1) \Rightarrow x * y = \{x + y\} \in [0, 1)$  deci legea este bine definită.  
 $(x * y) * z = \{(x * y) + z\} = \{\{x + y\} + z\} = \{x + y + z\} =$   
 $= \{x + \{y + z\}\} = \{x + (y * z)\} = x * (y * z)$  deci legea este  
asociativă.....1 punct  
Legea este comutativă:  $x * y = \{x + y\} = \{y + x\} = y * x \forall x, y \in G$   
Elementul neutru este  $0 \in [0, 1)$ ,  $x * 0 = \{x + 0\} = \{x\} = x \forall x \in G = [0, 1)$   
.....1 punct  
 $\forall x \in G$ ,  $x$  este simetrizabil și simetricul lui este  $x' = 1 - x$ ,  
 $x * x' = x' * x = \{x + x'\} = \{x + 1 - x\} = \{1\} = 0$ .....1 punct  
Deci  $(G, *)$  este grup abelian.
- c)  $x * x * x = (x * x) * x = \{\{x + x\} + x\} = \{x + x + x\} = \{3x\} = \frac{3}{4}$   
Dacă  $x \in [0, \frac{1}{3}) \Rightarrow 3x \in [0, 1) \Rightarrow \{3x\} = 3x = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \in [0, \frac{1}{3})$ . 1 punct  
Dacă  $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \Rightarrow 3x \in [1, 2) \Rightarrow \{3x\} = 3x - 1 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{7}{12} \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$   
Dacă  $x \in [\frac{2}{3}, 1) \Rightarrow 3x \in [2, 3) \Rightarrow \{3x\} = 3x - 2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{11}{12} \in [\frac{2}{3}, 1)$   
Deci  $x \in \{\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{11}{12}\}$ .....1 punct



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**Etapa locală 10.02.2024**  
**Județul Buzău**  
**CLASA a XII-a**

**Subiectul 3 (7 puncte)**

Considerăm  $(S_4, \cdot)$  grupul permutărilor de gradul 4.

- a) Fie  $H$  un subgrup propriu al lui  $S_4$ . Determinați numărul maxim de elemente din  $H$ .
- b) Fie  $M = \{x \in S_4 \mid x^2 = e\}$ . Demonstrați că  $M$  nu este subgrup al grupului  $(S_4, \cdot)$ .

**Soluție și barem**

- a)  $(S_4, \cdot)$  are  $4! = 24$  elemente.....1 punct  
Conform Teoremei lui Lagrange, "Ordinul subgrupului divide ordinul grupului", numărul maxim de elemente pe care-l poate avea un subgrup propriu este 12.....1 punct  
Subgrupul cu 12 elemente din  $(S_4, \cdot)$  este subgrupul permutărilor pare, grupul altern de gradul 4,  $(A_4, \cdot)$ .....2 puncte
- b)  $M = \left\{ e, (12), (13), (14), (23), (24), (34), \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ .....2 puncte

Dacă  $M$  este subgrup al grupului  $S_4$  atunci  $\text{card}(M) \mid 24 \Leftrightarrow 10 \mid 24$ , fals,  
deci  $M$  nu este subgrup al grupului  $S_4$  .....1 punct



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
Etapă locală 10.02.2024  
Județul Buzău  
CLASA a XII-a

**Subiectul 4 (7 puncte)**

Fie  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție derivabilă cu proprietatea:

$$x^2 \cdot f'(x) + xf(x) = 1, \quad \forall x > 0 \text{ și } f(1) = 0.$$

a) Arătați că  $f$  admite primitive și determinați o primitivă  $F$ , a lui  $f$  dacă  $F(1) = 0$ .

b) Calculați  $\int_1^e \frac{F(x)}{x} dx$ .

**Soluție și barem**

a) Relația din enunț se scrie  $x f'(x) + f(x) = \frac{1}{x}$ , pentru  $\forall x > 0 \Leftrightarrow$   
 $(x \cdot f(x))' = (\ln x)'$  .....2 puncte

Cum  $xf(x)$  și  $\ln x$  sunt derivabile pe  $(0, \infty)$  rezultă  $xf(x) = \ln x + c$  ....1 punct

Din  $f(1) = 0$  rezultă  $c = 0$  și deci  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ,  $\forall x \in (0, \infty)$  .....1 punct

$f$  este continuă pe  $(0, \infty)$  deci  $f$  are primitive pe  $(0, \infty)$  și  $\int f(x) dx =$   
 $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int (\ln x)(\ln x)' dx = \frac{1}{2} \cdot \ln^2 x + C$ ,  $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln^2 x + c$ ,  $F(1) = 0$ ,

$c = 0$ ,  $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln^2 x$  .....1 punct

b)  $\int_1^e \frac{F(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_1^e (\ln^2 x) \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_1^e (\ln^2 x) \cdot (\ln x)' dx =$  .....1 punct

$= \frac{1}{6} \cdot \ln^3 x \Big|_1^e = \frac{1}{6}$  .....1 punct